5 SÜREKLİLİK VE HOMEOMORFİZM

5.1 Süreklilik

Tanım: (X, τ_X) ve (Y, τ_Y) topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon (tasvir) ve $x_0 \in X$ olsun. $f(x_0)$'ın herhangibir W komşuluğu için, $\forall x \in V$ iken $f(x) \in W$ şartını sağlayan, x_0'ın bir V komşuluğu varsa, f fonksiyonuna <u>x_0'da sürekli</u> denir.

Bu tanım, $f(x_0)$'ın herhangibir W komşuluğu için $f(V) \subset W$ olacak şekilde x_0'ın bir V komşuluğu varsa, f fonksiyonuna, x_0'da süreklidir, tanımına denktir.

Veya, $f(x_0)$'ın herhangibir W komşuluğu için, $f^{-1}(W)$, x_0'ın bir komşuluğu ise f'ye x_0'da süreklidir, tanımına eşdeğerdir.

Tanım: X üzerindeki her noktada sürekli fonksiyona X üzerinde <u>sürekli</u> denir.

Teorem: (X, τ_X) ve (Y, τ_Y) topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

1) f, X üzerinde süreklidir.
2) $\forall U \in \tau_Y$ için $f^{-1}(U) \in \tau_X$ dir.
3) $\forall F \subset Y$ kapalı kümesi için $f^{-1}(F)$, X'de kapalıdır.
4) $\forall A \in 2^X$ için $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ dır.

Kanıt: (1)$\Rightarrow$(2) $U \in \tau_Y$ olsun. $x_0 \in f^{-1}(U)$ alalım. $f(x_0) \in U$ ve U açık olduğundan U, $f(x_0)$'ın bir komşuluğudur. f sürekli olduğundan $f^{-1}(U)$, x_0'ın bir komşuluğudur. Yani, $f^{-1}(U) \in \tau_X$ dir.

(2)$\Rightarrow$(3) F, Y'de kapalı bir küme olsun. $F^c \in \tau_Y$ ve $f^{-1}(F^c) = [f^{-1}(F)]^c \in \tau_X$ olduğundan $f^{-1}(F)$, X'de kapalıdır.

(3)$\Rightarrow$(4) $A \in 2^X$ olsun. F, Y'de $f(A)$'yı içeren herhangi kapalı bir küme olsun. Yani $f(A) \subset F$ ve F kapalı. Bu durumda, $A \subset f^{-1}(F)$ dir. $f^{-1}(F)$ kapalı olduğundan $\bar{A} \subset \overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$ dir. Buna göre $f(\bar{A}) \subset f(f^{-1}(F)) \subset F$ olacaktır.

$$f(\bar{A}) \subset \bigcap_{\substack{F \text{ kapalı} \\ f(A) \subset F}} F = \overline{f(A)}.$$

(4)$\Rightarrow$(1) $x_0 \in X$ ve W, $f(x_0)$'ın bir komşuluğu olsun. $W^c = Y - W$ kapalıdır. $f^{-1}(W^c)$'nin kapalı olduğunu gösterelim. $f(\overline{f^{-1}(W^c)}) \subset \overline{f(f^{-1}(W^c))} \subset \overline{W^c} = W^c$, yani $f(\overline{f^{-1}(W^c)}) \subset W^c$ dir. Buna göre, $\overline{f^{-1}(W^c)} \subset f^{-1}(W^c)$ dir. Bu ise $\overline{f^{-1}(W^c)} = f^{-1}(W^c)$ olduğunu gösterir. Yani $f^{-1}(W^c)$ kapalıdır. $f^{-1}(W^c) = f^{-1}(Y-W) = X - f^{-1}(W)$ olduğundan $f^{-1}(W)$ açık küme ve $x_0 \in f^{-1}(W)$ olduğundan, $f^{-1}(W)$, x_0'ın bir komşuluğudur. Yani, f, x_0'da süreklidir. ■

Uyarı: (X, τ_X) topolojik uzayından, (Y, τ_Y) topolojik uzayına giden bir f fonksiyonunun sürekliliğinden bahsedeceksek, teoremdeki (2) ifadesini kullanırız: Y'deki her U açık kümesi için $f^{-1}(U)$, X'de açık ise f'ye sürekli denir.

Örnekler: 1) (X, τ_X) diskirit topolojik uzay ise X'den keyfi (Y, τ_Y) topolojik uzayına giden keyfi f fonksiyonu süreklidir.

2) (X, τ_X) aşikar topolojik uzay olmak üzere X'den Y'ye giden üzerine bir fonksiyonun sürekli olması için gerek ve yeter şart Y'nin de aşikar topolojiye sahip olmasıdır.

3) (X, τ_X) aşikar topolojik uzay ve τ_Y aşikar $(\tau_Y = \{\emptyset, Y\})$ değilse X'den Y'ye giden sürekli fonksiyonlar yalnız sabit fonksiyonlardır.

4) $X = \{1, 2, 3\}$, $\tau_X = \{\emptyset, X, \{1, 2\}, \{3\}\}$ ve $Y = \{a, b, c\}$ olsun. $f(1) = f(2) = a$, $f(3) = b$ olarak tanımlansın. f'nin sürekli olması için Y'deki en kuvvetli topoloji $\tau_Y = \{\emptyset, Y, \{a, b\}, \{c\}\}$ dir.

5) 29.05.2012 (Final Sınavı) Soru 1: c) (15 puan) $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$, $\tau_Y = \{\emptyset, Y, \{1\}, \{1, 3\}\}$ ve $f: X \to Y$, $f(a) = f(b) = 1$, $f(c) = 3$, $f(d) = 2$ ise f'nin sürekli olması için X'de en zayıf topolojiyi bulunuz.

Çözüm: f'nin sürekli olması için $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(Y) = X$, $f^{-1}(\{1\}) = \{a, b\}$ ve $f^{-1}(\{1, 3\}) = \{a, b, c\}$ kümelerinin X'de açık olmaları gerekir. Buna göre,

$$\tau_X = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

f'nin sürekli olmasını sağlayacak X'de en zayıf topolojidir.

6) 28.03.2007 (Vize Sınavı) Soru 4: c) (10 puan) (X, τ_X) ve (Y, τ_Y) topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $x_n \in X$ dizisinin bir $x \in X$ noktasına yakınsaması $f(x_n) \in Y$ dizisinin $f(x) \in Y$ noktasına yakınsamasını gerektiriyorsa f sürekli midir? (Yani $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$ ise f sürekli midir?)

Çözüm: $f:(\mathbb{R},\tau_1)\to(\mathbb{R},\tau)$, $f(x)=x$ birim fonksiyonu olsun. Burada $\tau_1=\{A\in 2^{\mathbb{R}} \mid A^c=\mathbb{R}-A$ sayılabilir$\}\cup\{\emptyset\}$ dir. $(\mathbb{R},\tau_1)$'de yalnızca sabit diziler yakınsak olduğundan (47. sayfa, örnek) $x_n=x\to x$ ve $f(x_n)=f(x)=x\to f(x)=x$ dir. Yani $(\mathbb{R},\tau_1)$'deki her yakınsak dizi $x_n\to x$ için $(\mathbb{R},\tau)$'da $f(x_n)\to f(x)$'e yakınsar; fakat $(0,1)\in\tau$, $f^{-1}((0,1))=(0,1)\notin\tau_1$ olduğundan f sürekli fonksiyon değildir.

Teorem: $f:X\to Y$ bir fonksiyon ve $x_0\in X$ olsun. Bu durumda, aşağıdakiler eşdeğerdir.

a) f, x_0'da süreklidir.

b) x_0'a yakınsayan X üzerinde herhangi $\mathbb{B}$ filtre bazı için $f(\mathbb{B})=\{f(B)\mid B\in\mathbb{B}\}\to f(x_0)$ dır.

c) x_0'a yakınsayan X'deki herhangi $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ neti için $f(x_\alpha)\to f(x_0)$ dır.

Kanıt: (a)$\Rightarrow$(b) $\mathbb{B}$, x_0'a yakınsayan herhangibir filtre baz olsun. $f(x_0)$'ın bir komşuluğu W ise $f^{-1}(W)$, x_0'ın bir komşuluğudur. Buna göre, öyle bir $B\in\mathbb{B}$ vardır ki $B\subset f^{-1}(W)$ dur. Yani $f(B)\subset W$ dur. Bu ise $f(\mathbb{B})\to f(x_0)$ olduğunu gösterir.

(b)$\Rightarrow$(c) $S_\alpha=\{x_\beta\mid\beta\in I,\beta\geq\alpha\}$ ve $\mathbb{B}=\{S_\alpha\mid\alpha\in I\}$ olsun. (b)'den $f(x_\alpha)\to f(x_0)$ dır.

(c)$\Rightarrow$(a) W, $f(x_0)$'ın herhangibir komşuluğu olsun. x_0'ın öyle bir V komşuluğu vardır ki $V\subset f^{-1}(W)$ dur. Bunun, doğru olmadığını kabul edelim. x_0'ın keyfi V komşuluğu için $V\cap(f^{-1}(W))^c\neq\emptyset$ olsun. Her V için $x_V\in V\cap(f^{-1}(W))^c$ olalım. $\{x_V\}_{V\in\mathcal{B}(x_0)}$, X'de bir nettir. $\{x_V\}_{V\in\mathcal{B}(x_0)}$ ters kapsama bağıntısı ile filtre baz ile üretilen net olduğundan $x_V\to x_0$ dır. Her $V\in\mathcal{B}(x_0)$ için $f(x_V)\notin V$ olduğundan $f(x_V)\not\to f(x_0)$ dır. Bu ise çelişkidir. ∎

Teorem: X herhangibir küme ve τ_1,τ_2'de X'de herhangi iki topoloji olsun. τ_1'in τ_2'den daha kuvvetli olması için gerek ve yeter şart X'den X'e giden birim fonksiyonun ($i:(X,\tau_1)\to(X,\tau_2)$, $i(x)=x$) sürekli olmasıdır.

Teorem: (X,τ_X) ve (Y,τ_Y) topolojik uzaylar ve $f:X\to Y$ bir fonksiyon olsun. β, τ_Y için bir baz ise f'nin sürekli olması için gerek ve yeter şart her $B\in\beta$ için $f^{-1}(B)$'nin X'de açık olmasıdır.

Kanıt: f sürekli olsun. Her $B\in\beta$ elemanı Y'de açık küme olduğundan $f^{-1}(B)$'de X'de açıktır. Tersine, her $B\in\beta$ için $f^{-1}(B)$, X'de açık olsun. V, Y'de herhangi açık küme ise $V=\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha$ dır. $f^{-1}(V)=f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$ dır. $f^{-1}(B_\alpha)$'lar açık ve keyfi sayıda açık kümenin birleşimi açık olduğundan $f^{-1}(V)$ açıktır. Yani f süreklidir. ∎

$f: X \to Y$ bir fonksiyon ve $A \subset X$ olsun. f'nin A'ya kısıtlanması $f|_A$ ile gösterilir ve $f|_A(x) = f(x)$, $x \in A$ ile tanımlanır. ($f|_A : A \to Y$). f'ye ise $f|_A$ fonksiyonunun bir genişlemesi denir.

Teorem: (X, τ_X) ve (Y, τ_Y) topolojik uzaylar ve A, X'in bir altuzayı olsun. $f: X \to Y$ sürekli ise $f|_A$'da süreklidir.

Kanıt: $\forall U \in \tau_Y$ alalım. $f^{-1}|_A(U) = A \cap \underbrace{f^{-1}(U)}_{\in \tau} \in \tau_A$ dır. Yani $f|_A$ süreklidir. ■

Teorem: (X, τ_X) ve (Y, τ_Y) topolojik uzaylar ve $X = A \cup B$ olsun. (A ve B altuzaylar.) $f|_A$, $f|_B$ sürekli fonksiyonlar ve A, B ikisi birden kapalı veya ikisi birden açık ise f süreklidir.

Kanıt: $f|_A$ ve $f|_B$ sürekli ve $A, B \in \tau_X$ olsun. (İkisi birden kapalı ise benzer yolla yapılır.) $U \in \tau_Y$ alalım. $f^{-1}|_A(U) \in \tau_A$ ve $f^{-1}|_B(U) \in \tau_B$ dir. $X = A \cup B$ olduğundan $f^{-1}(U) = f^{-1}|_A(U) \cup f^{-1}|_B(U)$ dur. A ve B, X'de açık küme olduklarından $f^{-1}|_A(U)$ ve $f^{-1}|_B(U)$, X'de açık kümelerdir. Dolayısıyla $f^{-1}(U) \in \tau_X$ dir. ■

Örnekler: 1) $X = Y = \mathbb{R}$ ve $\tau_X = \tau_Y$ doğal metrik ile doğrulan topoloji olsun.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad A = \{x \mid x \geq 0\} \text{ ve } B = \{x \mid x \leq 0\}$$ ise f sürekli midir?

A, B, X'de kapalı ve $f|_A = x$, $f|_B = 0$ sürekli olduklarından f süreklidir.

2) $X = Y = \mathbb{R}$ ve $\tau_X = \tau_Y$ doğal topoloji olsun.

$$g(x) = \begin{cases} 3, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad A = \{x \mid x \geq 0\} \text{ ve } B = \{x \mid x < 0\}$$ olsun. $g|_A$ ve $g|_B$ süreklidir. Fakat g sürekli değildir.

3) $X = Y = \mathbb{R}$ ve $\tau_X = \tau_Y$ doğal topoloji olsun.

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad A = \{x \mid x \geq 0\} \text{ ve } B = \{x \mid x < 0\}$$ olsun.

Teoremin şartı sağlanmadığı halde h süreklidir.

5.2 Homeomorfizm

Tanım: (X,τ_X) ve (Y,τ_Y) topolojik uzaylar ve $f:X\to Y$ bire-bir üzerine bir fonksiyon olsun. Eğer f ve f^{-1} sürekli ise f'ye X'den Y'ye bir homeomorfizm (topolojik tasvir (fonksiyon), topolojik dönüşüm) denir. X ve Y topolojik uzayları arasında bir homeomorfizm varsa X ve Y'ye homeomorfiktir denir ve $X\cong Y$ ile gösterilir. Eğer, $g:X\to Y$, Y'nin bir altuzayına homeomorfik ise Y'de X'in gömülmesi (embedding) denir.

Örnekler: 1) $(\mathbb{R},\tau)$'da $(0,1)$ ve $(0,2)$ homeomorfiktir. $f:(0,1)\to(0,2)$, $f(x)=2x$ bire-bir, üzerine, sürekli ve tersi $f^{-1}(x)=\frac{x}{2}$ süreklidir. Yani f bir homeomorfizmdir.

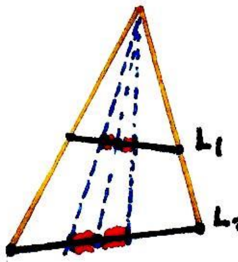
2) $(\mathbb{R},\tau)$'da herhangi (a,b) açık aralığı $(0,1)$'e homeomorfiktir. $f:(0,1)\to(a,b)$, $f(x)=a(1-x)+bx$ bir homeomorfizmdir. (Gösteriniz.)

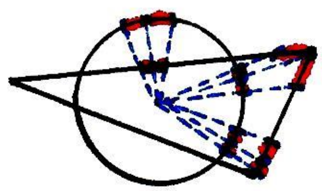
3) $(\mathbb{R},\tau)$'da $(0,1)$ ile $(1,\infty)$ homeomorfiktir. $f:(0,1)\to(1,\infty)$, $f(x)=\frac{1}{x}$ bir homeomorfizmdir. (Gösteriniz.)

4) $\mathbb{R}$ ve $(-1,1)$ homeomorfiktir. $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$ bir homeomorfizdir. $\left(f^{-1}(x)=\frac{x}{1-|x|}\right)$. (Gösteriniz.)

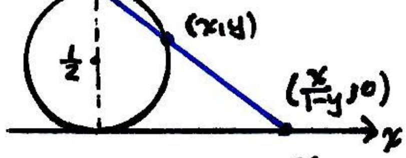
5) $(\mathbb{R},\tau)$ ile $\mathbb{R}$'de $d(x,y)=\inf\{1,|x-y|\}$ ile doğrulan topoloji homeomorfiktir. $\mathbb{R}\cong\mathbb{R}$ dir.

6) $(\mathbb{R}^2,\tau)$'da kapalı iki doğru homeomorfiktir.



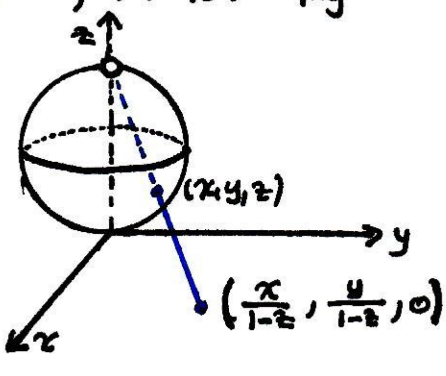
7)  $(\mathbb{R}^2,\tau)$'da çember ve üçgen homeomorfiktir.

8) $(\mathbb{R}^2,\tau)$'da kuzey kutbu çıkarılmış çember ile reel sayılar homeomorfiktir.



$\tilde{S}_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2^2}\}-\{(0,1)\}$, $f:\tilde{S}_1\to\mathbb{R}$, $f((x,y))=\frac{x}{1-y}$.

9) $(\mathbb{R}^3,\tau)$'da kuzey kutbu çıkarılmış küre ile düzlem homeomorfiktir.



$\tilde{S}_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2^2}\}-\{(0,0,1)\}$

$f:\tilde{S}_2\to\mathbb{R}^2$, $f((x,y,z))=\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right)$.

10) $f: [0,1) \to S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$, $f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ fonksiyonu birebir, üzerine ve sürekli fonksiyondur. (Burada, $[0,1)$, $(\mathbb{R}, \mathcal{Z})$'nun bir altuzayı ve S^1, $(\mathbb{R}^2, \mathcal{Z})$'nun bir altuzayıdır.) $[0,\frac{1}{2}) \in \mathcal{Z}_{[0,1)}$ dır, fakat $(f^{-1})^{-1}([0,\frac{1}{2}))$, S^1 de açık küme değildir. Bu yüzden f^{-1} sürekli değildir. Yani, f bir homeomorfizm değildir.

11) 26.03.2008 (Vize Sınavı) Soru 4: c) (10 puan) Bire-bir, üzerine, sürekli fakat homeomorfizm olmayan bir fonksiyona örnek veriniz. (Yani, 1-1, üzerine, sürekli fakat tersi sürekli olmayan bir fonksiyon bulunuz.)

Çözüm: $X=\{a,b\}$, $Y=\{1,2\}$, $\mathcal{Z}_X = 2^X$, $\mathcal{Z}_Y = \{\emptyset, Y\}$, $f(a)=1$, $f(b)=2$ ile tanımlanan $f: X \to Y$ fonksiyonu bire-bir, üzerine ve süreklidir (?). f'nin ters fonksiyonu $f^{-1}=g$: $Y \to X$, $g(1)=a$, $g(2)=b$ fonksiyonu $g^{-1}(\{a\}) = \{1\} \notin \mathcal{Z}_Y$ olduğundan sürekli değildir.

12) 06.05.2010 (Kısa Sınav II) Soru 2: a) (25 puan) $\mathbb{Z}$'de diskrit topolojik uzaya göre $A=\{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ve $B=\{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ kümelerinin homeomorfik olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\mathbb{Z}$ diskrit topoloji olduğundan $\mathcal{Z}_A$ ve $\mathcal{Z}_B$ altuzay topolojileri de diskrittir. A'dan B'ye giden her fonksiyon (ve tersine B'den A'ya) sürekli olduğundan A'dan B'ye 1-1 ve üzerine fonksiyon bulmamız yeterlidir. $f(k)=\frac{3}{2}k$ fonksiyonu bire-bir ve üzerinedir. A ve B homeomorfiktir.

13) 29.05.2012 (Final Sınavı) Soru 2: a) (15 puan) $A=[0,1]$ ve $B=(0,1)$ kümeleri hangi topolojide homeomorfiktir. (Gerekli açıklamaları yapınız.)

Çözüm: Çalışma sorusu:) (Derste yapılacak)

Teorem: $(X,\mathcal{Z}_X)$ ve $(Y,\mathcal{Z}_Y)$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$, bire-bir, üzerine bir fonksiyon olsun. Bu durumda, aşağıdakiler denktir.

1) f, bir homeomorfizmdir.
2) U'nun Y'de açık olması için gerek ve yeter şart $f^{-1}(U)$'nun X'de açık olmasıdır.
3) F'nin Y'de kapalı olması için gerek ve yeter şart $f^{-1}(F)$'nin X'de kapalı olmasıdır.
4) $\mathcal{B}$, $\mathcal{Z}_X$ için bir baz ise $f(\mathcal{B}) = \{f(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$, $\mathcal{Z}_Y$ için bir bazdır.

Kanıt: (1)⇒(2) U, Y'de bir açık küme olsun. f sürekli olduğundan $f^{-1}(U)$, X'de açıktır. U, Y'de bir küme ve $f^{-1}(U)$, X'de açık olsun. f üzerine olduğundan $f(f^{-1}(U)) = U$ dur. $f=(f^{-1})^{-1}$ ve f^{-1} sürekli olduğundan $(f^{-1})^{-1}(f^{-1}(U)) = U$, Y'de açık kümedir. Bu yüzden, U'nun Y'de açık olması için $f^{-1}(U)$'nun X'de açık olmasıdır.

(2)⇒(3) F, Y'de kapalı bir küme olsun. $Y-F$, Y'de açıktır; (2)'den $f^{-1}(Y-F)=X-f^{-1}(F)$, X'de açıktır. Dolayısıyla $f^{-1}(F)$, X'de kapalıdır. Y'de F kümesi, $f^{-1}(F)$ kümesi X'de kapalı küme şartını sağlayan bir küme olsun. $f^{-1}(Y-F)=X-f^{-1}(F)$, X'de açık, dolayısıyla $Y-F$, Y'de açıktır. Buna göre, F, Y'de kapalıdır.

(3)⇒(1) (3) f ve f^{-1}'in sürekli olduğunu gösterir. Dolayısıyla f bir homeomorfizmdir.

(1)⇒(4) U, Y'de herhangibir açık küme olsun. (1)'den $f^{-1}(U)$, X'de açıktır. Dolayısıyla uygun bir I indeksi için $f^{-1}(U)=\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha$, $B_\alpha\in\beta$ şeklinde yazılabilir. (1), (2), (3)'ün denkliğinden $f(B_\alpha)$'lar Y'de açık kümelerdir ve $f(f^{-1}(U))=U=f(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}f(B_\alpha)$ dır. Y'deki keyfi U açık kümesini, $f(\beta)$'nın elemanlarının birleşimi olarak yazabileceğimizden $f(\beta)$, τ_Y için bir bazdır.

(4)⇒(1) U, Y'de bir açık küme olsun. U'yu uygun I indeksi ile $U=\bigcup_{\alpha\in I}f(B_\alpha)$ yazabiliriz. $f^{-1}(U)=f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I}f(B_\alpha))=\bigcup_{\alpha\in I}f^{-1}(f(B_\alpha))=\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha$ eşitliğinden $f^{-1}(U)$'nun açık olduğu görülür. Yani f süreklidir. V, X'de herhangibir açık küme olsun. $V=\bigcup_{\gamma\in J}B_\gamma$ ($B_\gamma\in\beta$) yazılabilir. $f(V)=f(\bigcup_{\gamma\in J}B_\gamma)=\bigcup_{\gamma\in J}f(B_\gamma)$, Y'de açıktır. $f=(f^{-1})^{-1}$ olduğu için V, X'de açık ise $(f^{-1})^{-1}(V)$, Y'de açıktır. Yani f^{-1} süreklidir. Sonuç olarak f bir homeomorfizmdir. ■

Teorem: Υ bütün topolojik uzayların sınıfı olsun. "Homeomorfik olma" ile tanımlanan bağıntı, Υ üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Kanıt: (X,τ_X), (Y,τ_Y) ve (Z,τ_Z) topolojik uzaylar olsun.

1) $i:(X,\tau_X)\to(X,\tau_X)$ birim fonksiyon bir homeomorfizmdir. Dolayısıyla X kendisine homeomorfiktir. Yani $X\cong X$ dir.
2) (X,τ_X) topolojik uzayı, (Y,τ_Y) topolojik uzayına homeomorfik olsun. $f:X\to Y$, X ile Y arasında bir homeomorfizm ise $f^{-1}:Y\to X$, Y ile X arasında bir homeomorfizma olacağından, Y ile X homeomorfiktir. Yani $X\cong Y\Rightarrow Y\cong X$ dir.
3) $X\cong Y$ ve $Y\cong Z$ olsun. Bu durumda, $f:X\to Y$ ve $g:Y\to Z$ homeomorfizmleri vardır. $h=g\circ f:X\to Z$ bileşke fonksiyonu da bir homeomorfizma olacağından (gösteriniz), X ile Z homeomorfiktir. Yani, $X\cong Y$, $Y\cong Z\Rightarrow X\cong Z$ dir. ■

Tanım: Bir topolojik uzayda, bir özellik, bu topolojik uzaya homeomorfik olan bütün topolojik uzaylarda da geçerli ise bu özelliğe <u>topolojik özellik</u> denir.

Yani, bir özellik homeomorfizm altında korunuyorsa (değişmiyorsa) bu özelliğe topolojik özellik denir.

Örnekler: 1) Uzunluk topolojik özellik değildir. $(\mathbb{R},\tau)$'da $(0,1)$ ve $(0,2)$ homeomorfiktirler. $(0,1)$'de $A=(\frac{1}{2},1)$ kümesinin uzunluğu $|1-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}$ iken, $(0,2)$'de $f(A)=f((\frac{1}{2},1))=(1,2)$ kümesinin uzunluğu $|2-1|=1$ dir.

2) Sınırlılık bir topolojik özellik değildir. Sayfa 57, 5. örnekte $(\mathbb{R},\tau)$ ile $d(x,y)=\inf\{1,|x-y|\}$ metriği ile üretilen τ_d topolojik uzayı homeomorfiktirler. $(\mathbb{R},\tau_d)$ sınırlı olmasına rağmen, $(\mathbb{R},\tau)$ sınırlı değildir.

Şimdi homeomorfizmden daha zayıf olan "topolojik izomorfizm" tanımını verelim.

Tanım: (X,τ_X) ve (Y,τ_Y) topolojik uzaylar olsun. Eğer, aşağıdaki şartları sağlayan $f:\tau_X\to\tau_Y$ bire-bir üzerine bir fonksiyon varsa X ve Y'ye <u>topolojik izomorfik</u> denir.

1) $f(\emptyset)=\emptyset$ ve $f(X)=Y$,

2) $U_1,U_2\in\tau_X$ için $f(U_1\cap U_2)=f(U_1)\cap f(U_2)$

3) $U_\alpha\in\tau_X$ için $f(\bigcup U_\alpha)=\bigcup f(U_\alpha)$.

f'ye <u>topolojik izomorfizm</u> denir.